



## Materialers rheologi, styrke og levetid med speciel reference til træ

Nielsen, Lauge Fuglsang

*Publication date:*  
2004

*Document Version*  
Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Nielsen, L. F. (2004). *Materialers rheologi, styrke og levetid med speciel reference til træ*. Byg Rapport No. r-079  
<http://www.byg.dtu.dk/publications/rapporter/byg-r079.pdf>

---

### General rights

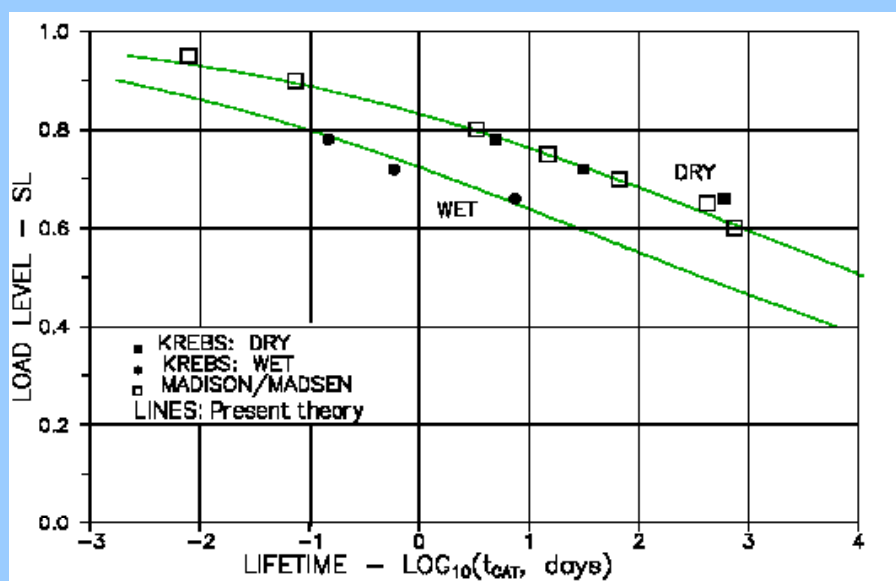
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Materialers rheologi, styrke og levetid med speciel reference til træ

Lauge Fuglsang Nielsen





# Materialers rheologi, styrke og levetid med speciel reference til træ

Lauge Fuglsang Nielsen

## FORORD

Træ er et materiale med betydelige tidsafhængige egenskaber. Det viser sig blandt andet derved at en træbjælke under konstant last kan have en nedbøjning efter nogle måneder, som er væsentligt større end udbøjningen umiddelbart efter bjælkens ibrugtagning.

Træ er også et materiale med revner og andre "fejl" (fx knaster), der forårsager en betydelig styrkereduktion. Reduktionen er ligesom udbøjningen tidsafhængig. Man taler om korttidsstyrken som den last, træet kan bære i cirka 1 minut - og langtidsstyrke som den last træet kan bære i 10 år før brud indtræder.

Af mange grunde (bl.a. resurcemæssige) stilles der i dag i stigende grad funktionskrav med hensyn til konstruktioners udbøjning og levetid. Rheologi (gr. læren om det, der flyder) og Brudmekanik er nyttige "værktøjer" til brug i analyser, der tager hensyn til sådanne krav.

Notatet er udarbejdet som en indføring i fagdisciplinerne rheologi og brudmekanik med specielt henblik på anvendelse i forbindelse med levetidsanalyser af træ som konstruktionsmateriale. Principielt kan de udviklede udtryk imidlertid også anvendes på andre bygningsmaterialer.

Af forenklingsmæssige grunde hviler fremstillingen af stoffet i det væsentlige på en isotrop materialeopfattelse (samme mekaniske egenskaber i alle retninger). Træ er som bekendt ikke et isotropt materiale. Det er orthotropt med forskellige egenskaber i tre hovedretninger. For brudmekanikken betyder det, at udtryk, hvori Young's modul optræder, strengt taget kun er gyldige på træ såfremt Young-modulen erstattes med en speciel "orthotrop Young's modul". Det kan imidlertid vises (1), at notates brudmekanik-baserede resultater som de præsenteres i en form, hvor Young's modul ikke optræder eller hvor formen er normeret (dimensionsløs), er fuldt gyldige for træ. "Normeret" betyder i denne sammenhæng, at krybning, styrke og last er sat i forhold til følgende referenceværdier målt i lastens retning: krybningens begyndelsesværdi (reciprok Young's modul), den maximalt opnåelige (urevnede) styrke og traditionel korttidsstyrke. I nævnte rækkefølge defineres herved de begreber, der anvendes i notatet, nemlig normeret krybning, styrkeniveau henholdsvis lastniveau.

Den "normerede" resultat-præsentation er af betydelig praktisk værdi, idet denne, som det vil fremgå i notatet, medfører, at der kan opstilles standardløsninger for en række levetidsproblemer for træ - for eksempel træs levetid i relation til fugtmiljø.

I et par eksempler illustreres rheologiens og brudmekanikkens formåen i analyser af træs tidsafhængige mekaniske adfærd. Yderligere eksempler er givet i (1,2,3,4,5,6,7) - herunder sådanne, der belyser *reststyrkeproblematikken*; det vil sige, hvilken styrke kan træ påregnes at have i en genbrugssituation.

**Vejledning:** En del symboler knytter sig til stofpræsentationen, specielt med hensyn til levetider. Læseren tilrådes tidligt at orientere sig i symbollisten, der er anført som Kapitel 4 bagest i notatet. Den citerede litteratur er anført i Kapitel 5. Til hjælp for rapportens numeriske beregninger er der udviklet et software 'R-079', der kan rekvireres ved henvendelse til forfatteren: lfn@byg.dtu.dk.

# INDHOLD

FORORD .....	3
INDHOLD .....	4
1. RHEOLOGI.....	5
1.1 Lineær viskoelasticitet.....	5
1.2 Mekaniske modeller .....	7
1.2.2 Kelvin-modellen .....	8
1.2.3 Burgers-modellen .....	8
1.2.4 Eksponentialkrybning .....	9
Bestemmelse af krybningsparametre.....	9
1.3 Spændings-tøjnings-analyse .....	10
1.3.1 Viskoelastiske operatorer .....	10
1.3.2 Elastisk-viskoelastisk analogi .....	10
Tilnærmet e-v-analogi .....	10
2. STYRKE .....	12
2.1 Teoretisk Styrke .....	12
2.2 Reel styrke - brudmekanik .....	14
2.2.1 Griffith-styrken (enkelt revne) .....	14
2.2.2 Reel styrke versus teoretisk styrke .....	15
2.3 Multi- og kantrevner .....	16
2.4 Andre revnesystemer .....	16
2.5 Bestemmelse af revneparametre .....	17
2.6 Troværdighed af Griffith-modellen .....	18
3. TRÆ.....	20
3.1 Udtørring af træ .....	20
3.1.1 Spændinger .....	20
3.1.2 Styrkeforhold .....	22
3.2 Mekanisk levetid .....	22
3.2.1 Simpel analyse - start på revneudbredelse ( $t_s$ ) .....	23
3.2.2 Nøjagtig analyse .....	24
Moderat varierende lastniveau .....	24
Konstant lastniveau (dead load) .....	24
3.3 Træs levetid versus trækvalitet.....	25
APPENDIX A: Dugdale modellen .....	27
Frontbredde og frontåbning .....	27
Brudkriterium.....	27
Referencestyrke .....	27
Hjælpeudtryk .....	27
APPENDIX B: Variabelt lastniveau .....	28
Design diagrammer .....	29
4. Symbolliste .....	31
5. Litteratur .....	32

# 1. RHEOLOGI

Ordet rheologi er græsk og betyder læren om det, som flyder. Som sådan rummer begrebet enhver tænkelig materialerelation mellem kraft (spænding) og deformation (tøjning) samt tid.

Rheologisk set er mange bygningsmaterialer som for eksempel træ vist at kunne klassificeres som såkaldte lineær viskoelastiske materialer, såfremt belastningen er lavere end cirka 50% - 60 % af den, der fremkalder brud. Det vil sige, at de fleste brugstilstande er tilgodeset i denne relativt simple materialeopfattelse, der skal forklares nærmere i det følgende afsnit.

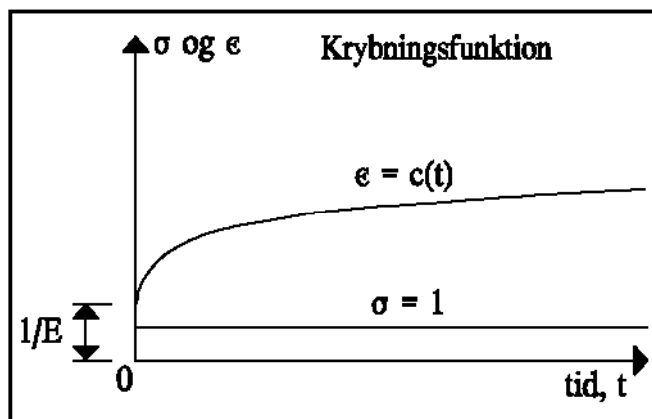
## 1.1 Lineær viskoelasticitet

Lineær viskoelastisk materialer er materialer, hvis spændings-tøjningsrelation kan beskrives ved en ligning af typen

$$\sum_{k=0}^N p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^N q_k \frac{d^k \epsilon}{dt^k} \quad (1.1)$$

hvor  $p_k$  og  $q_k$  er materialekonstanter. Spænding og tøjning er betegnet ved  $\sigma$  henholdsvis  $\epsilon$ .

Benævnelsen, "lineær viskoelastisk", anvendes fordi 1) sammenhængen mellem spænding og tøjning er lineær (ligning 1.1 er en lineær differentialligning), fordi 2) tiden er indblandet (flydning, viskositet) og fordi 3) almindelig elasticitet også er involveret. Det sidste indses ved at lade alle  $p_k$  og  $q_k$ , undtagen  $p_0$  og  $q_0$ , blive 0. Herved reduceres Ligning 1.1 til Hooke's lov,  $\sigma = E\epsilon$ , hvor  $E = q_0/p_0$  er Young modulen.



Figur 1.1. Krybningsfunktionen er tøjningen under spændingen 1.

Et vigtigt kendetegn for viskoelastiske materialer er den såkaldte krybningsfunktionen,  $c(t)$ , der angiver den tøjning, der fremkaldes, når materialet belastes til tidspunkt  $t = 0$  med den konstante spænding,  $\sigma = 1$ . Krybningsfunktionen forløber typisk som vist i Figur 1.1. Begyndelsesværdien er  $c(0) = 1/E$ .

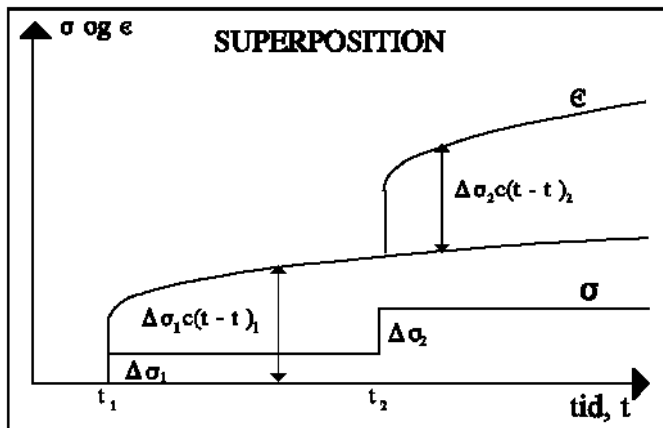
Krybningsforløbet kan ved superposition, som vist i Figur 1.2, anvendes til opbygning af tøjningsløsningen for et stepvarierende spændingsforløb. Vi får

$$\epsilon(t) = \Delta \sigma_1 c(t - t_1) + \Delta \sigma_2 c(t - t_2) + \dots = \sum_{n=1}^N \Delta \sigma_n c(t - t_n) \quad (1.2)$$

hvor  $\Delta \sigma_n = \Delta \sigma(t_n)$  betyder en springvis spændingsændring til tidspunkt  $t_n$ . Ved overgang til et

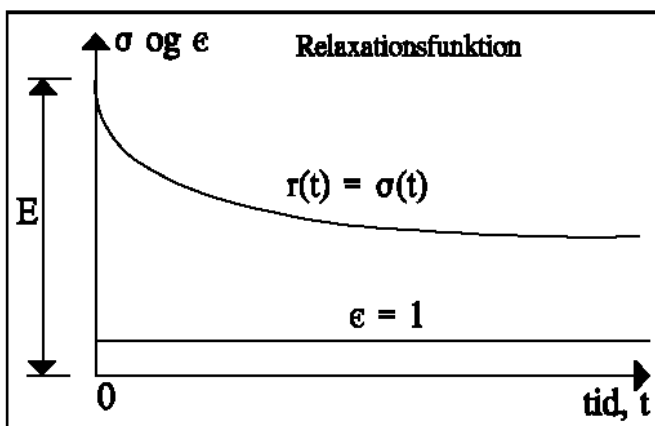
vilkårligt, kontinuert spændingsforløb erstattes i Ligning 1.2  $t_n$  med  $\theta$ , spændingsspringene med  $\Delta\sigma(\theta) = (d\sigma/d\theta)d\theta$  og summationstegnet med et integral. Vi får herefter

$$\varepsilon(t) = \int_0^t c(t-\theta) \frac{d\sigma}{d\theta} d\theta \quad ; \quad \sigma \equiv 0 \text{ for } t < 0 \quad (1.3)$$



**Figur 1.2.** Superpositionslovens anvendelse i forbindelse med step-formet spændingsvariation.

Analogt til krybningsfunktionen defineres den såkaldte relaxationsfunktion  $r(t)$  som den spænding, der induceres i materialet, når dette påvirkes med en konstant tøjning,  $\varepsilon = 1$ , virkende fra  $t = 0$ . En relaxationsfunktion forløber typisk som vist i Figur 1.3.



**Figur 1.3.** Relaxationsfunktionen er spændingen fremkaldt af en konstant tøjning.

På ganske tilsvarende måde, som krybningsfunktionen fører frem til tøjningsløsningen i Ligning 1.3, fører relaxationsfunktionen frem til spændingsløsningen

$$\sigma(t) = \int_0^t r(t-\theta) \frac{d\varepsilon}{d\theta} d\theta \quad ; \quad \varepsilon \equiv 0 \text{ for } t < 0 \quad (1.4)$$

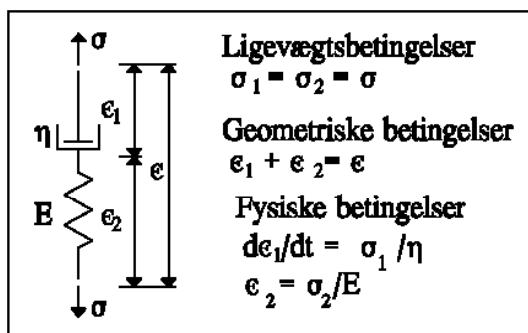
Det er vigtigt at gøre sig klart, at spændings-tøjnings-relationerne som udtrykt ved Ligningerne, 1.1, 1.3 og 1.4, er ensbetydende. Et af udtrykkene definerer entydigt et materiales viskoelastiske opførsel.

Med hensyn til anvendelser kan der imidlertid være meget store forskelle i den matematiske kompleksitet. Normalt vil det være således, at integralrepræsentationen udtrykt ved Ligning 1.3 vil være at foretrække ved løsning af problemer med foreskrevet last, mens Ligning 1.4 er mere hensigtsmæssig at anvende, når deformationen er givet.

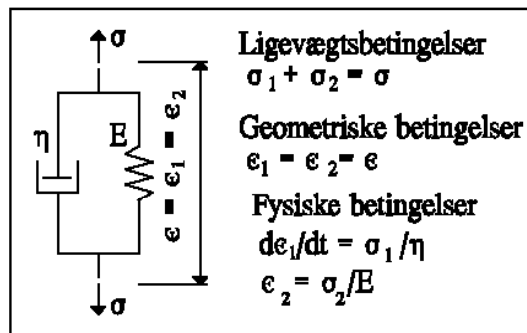
## 1.2 Mekaniske modeller

Ovenstående redegørelse vedrørende lineær viskoelastiske materialer kan illustreres gennem den mekaniske analogi:

Ligning 1.1 er identisk med de udtryk, der styrer sammenhængen mellem deformation og last i mekaniske modeller, opbygget af fjedre (Hooke-elementer) og væskebremsere (Newton-elementer). Kraft og deformation svarer til spænding henholdsvis tøjning. Sådanne modeller kan være uhyre nyttige at støtte sig til, når forsøgsresultater skal vurderes. Nedenfor gennemgås de tre vigtigste mekaniske modeller. Indeks 1 og 2 på spænding og tøjning refererer til de to grundmekanismer Newton- henholdsvis Hooke-elementet.



Figur 1.4. Maxwellmaterialets mekaniske analogi.



Figur 1.5. Kelvinmaterialets mekaniske analogi.

### 1.2.1 Maxwell-modellen

Den mekaniske model i Figur 1.4 definerer ved de angivne ligninger det såkaldte Maxwell-materiale. Løsning af ligningerne giver følgende spændings-tøjningsrelation, der er en specialudgave af Ligning 1.1,

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{E} \left( \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\tau} \right) \quad \text{hvor} \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad \text{er relaxationstiden} \quad (1.5)$$

hvor E og η betegner elasticitetsmodul henholdsvis viskositet. Af grunde, som vil fremgå nedenfor kaldes den indførte forkortelse, τ, for materialets relaxationstid.

Krybningsfunktionen for et Maxwell materiale fås ved at indsætte σ = 1, virkende fra t = 0, i Ligning 1.5. Tilsvarende fås relaxationsfunktionen ved indsættelse af ε = 1, virkende fra t = 0. Resultaterne er givet i Ligningerne 1.6 og 1.7.

$$c(t) = \frac{1}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (1.6)$$

$$r(t) = E * \text{EXP} \left( -\frac{t}{\tau} \right) \quad (1.7)$$

Til t = τ er relaxationsfunktionen reduceret til ca. 40 % af sin begyndelsessværdi. Dette forhold definerer betydningen af begrebet relaxationstid. Ofte anvendes også betegnelsen 'fordoblingstid', refererende til, at krybningsfunktionen er fordoblet til t = τ.



### 1.2.2 Kelvin-modellen

Den mekaniske model i Figur 1.5 definerer ved de angivne ligninger det såkaldte Kelvin materiale. Løsning af ligningerne giver følgende specialudgave af Ligning 1.1 med krybningsfunktionen som udtrykt i Ligning 1.9

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau} = \frac{\sigma}{\tau E} ; \quad \left( \tau = \frac{\eta}{E} \right) \quad (1.8)$$

$$c(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (1.9)$$

Relaxationsfunktionen er ikke defineret i påvirkningstidspunktet (væskebremsen kan ikke uendelig hurtigt indstille sig på  $\varepsilon = 1$ ). For  $t > 0$  har vi

$$r(t) \equiv E \quad (t > 0) \quad (1.10)$$

### 1.2.3 Burgers-modellen

Denne model, der er vist i Figur 1.6, definerer det såkaldte Burgersmateriale. Den består af en Maxwell-model i forlængelse af en Kelvin-model. Den tilhørende spændings-tøjnings-relation på differentiaalligningsform er

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} + \left[ \frac{1}{\tau_K} \left( 1 + \frac{E}{E_K} \right) + \frac{1}{\tau} \right] \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\tau_K \tau} \sigma = E \left[ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \frac{1}{\tau_K} \frac{d\varepsilon}{dt} \right] \quad (1.11)$$

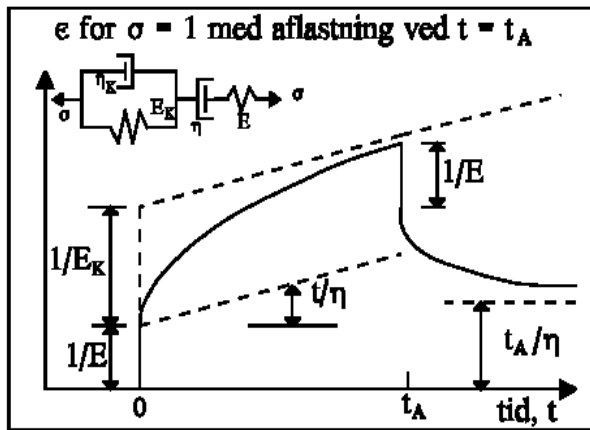
hvor Kelvin- og Maxwell-modellernes elasticitetskoefficienter er givet ved  $E_K$  henholdsvis  $E$ . De tilsvarende relaxationstider er, jfr. Ligningerne 1.5 og 1.8, givet ved

$$\tau_K = \frac{\eta_K}{E_K} ; \quad \tau = \frac{\eta}{E} \quad (1.12)$$

Burgers-modellen, hvis krybningsfunktion er givet ved Ligning 1.13 og afbildet i Figur 1.6, er den model, der mest realistisk (kvalitativt og ofte kvantitativt) kan beskrive alle de tøjningsfænomener, der karakteriserer et viskoelastisk materiale. Det vil sige: 1) Den beskriver en ren elastisk komponent (den frie fjeder), 2) en ren viskos, irreversibel komponent (den frie væskebremse) og 3) en forsinket elastisk komponent (Kelvin-elementet).

$$c(t) = \frac{1}{E} \left[ 1 + \frac{t}{\tau} + \frac{E}{E_K} (1 - e^{-t/\tau_K}) \right] \quad (1.13)$$

Uendelig mange mekaniske materialemodeller kan opstilles ved kombination af fjedre og væskebremses. Normalt kan det imidlertid ikke betale sig at gå videre end til Burgers-modellen, når materials mekaniske opførsel forsøges simuleret gennem en mekanisk model. Kan Burgers-modellen ikke bringes til at dække forsøgsresultater tilstrækkeligt godt kan den bruges som udgangspunkt i en rent matematisk tilpasningsprocedure - som oftest i forbindelse med fitning af krybningsfunktionen.



Figur 1.6. Burger-modellen er den simpleste mekaniske model, der beskriver alle tøjningstyper i et viskoelastisk materiale.

### 1.2.4 Eksponentialkrybning

Træ, plastic og en række keramiske materialer har rheologiske forhold, der kun kan beskrives gennem en uhyre kompliceret mekanisk analogi. Det har imidlertid vist sig (8), at krybningsfunktionerne med god tilnærmelse kan beskrives ved følgende simple eksponentialudtryk, svarende til en "generaliseret" Maxwell-model (se Ligning 1.6),

$$c = c(t) = \frac{1}{E} \left( 1 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^b \right) \quad \text{med } 0 < b < 1 \quad (1.14)$$

hvor relaxationstiden  $\tau$  og krybningsekspONENTEN  $b$  er materialeparametre. Relaxationstiden benævnes også fordoblingstid idet  $c(\tau) = 2c(0)$ . I et senere afsnit kvantificeres de nævnte parametre for træ. For plast og keramik må  $b$  og  $\tau$ , i de enkelte tilfælde hentes, eller deduceres, fra speciallitteraturen.

Relaxationsfunktionen, svarende til ovennævnte krybningsfunktion kan bestemmes af Ligningerne 1.1 eller 1.3. De ret komplicerede beregninger (8) giver resultatet i Ligning 1.15, hvor  $\Gamma(1+x)$  ( $= x!$ ) er gammafunktionen af  $1+x$ . For materialer med  $b < 0.3$  er udtrykket i Ligning 1.16 en meget fin tilnærmelse. Det skal understreges, at udtrykket,  $r(t) \approx 1/c(t)$ , ikke er generelt gyldig for viskoelastiske materialer.

$$r = r(t) = E \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-X)^n}{\Gamma(1+nb)} \quad \text{med } X = \Gamma(1+b) \left( \frac{t}{\tau} \right)^b \quad (1.15)$$

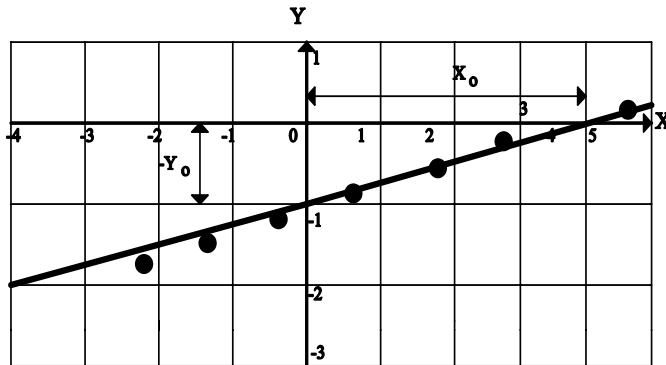
$$r = r(t) \approx \frac{1}{c(t)} = \frac{E}{1 + (t/\tau)^b} \quad b < 0.3 \quad (1.16)$$

#### Bestemmelse af krybningsparametre

Udfra en række målte krybningsdata er det ret enkelt at bestemme krybningsparametrene  $\tau$  og  $b$ . Vi benytter, at krybningsfunktionen i Ligning 1.14 kan lineariseres ved logaritmisering, hvorefter

$$Y = Y_0 + \alpha X \quad \text{med} \quad Y = \log_{10}(E\epsilon(t) - 1) \quad ; \quad X = \log_{10}(t)$$

$$\Rightarrow b = \alpha = -\frac{Y_0}{X_0} \quad ; \quad \tau = 10^{-Y_0/\alpha} = 10^{X_0} \quad (1.17)$$



**Figur 1.7.** Eksperimentel bestemmelse af de rheologiske parametre for et materiale med eksponentialkrybning, se Ligningerne 1.14 og 1.17.

## 1.3 Spændings-tøjnings-analyse

### 1.3.1 Viskoelastiske operatorer

De to ligeværdige integraludtryk i Ligningerne 1.3 og 1.4 kan skrives på operatorformen vist i Ligning 1.18. Operatorene kaldes ofte analogioperatorer på grund af den slående lighed til elasticitetsmodulen  $E$  i de tilsvarende elasticitetsudtryk ( $\epsilon = \sigma/E$  og  $\sigma = E\epsilon$ ).

$$\epsilon = \bar{E}^{-1}[\sigma] \quad \text{med} \quad \bar{E}^{-1}[\ ] = \int_0^t c(t-\theta) \frac{d[\ ]}{d\theta} d\theta$$

$$\sigma = \bar{E}[\epsilon] \quad \text{med} \quad \bar{E}[\ ] = \int_0^t r(t-\theta) \frac{d[\ ]}{d\theta} d\theta \quad (1.18)$$

### 1.3.2 Elastisk-viskoelastisk analogi

Det kan vises, at løsningen til et lineær-viskoelastisk problem kan opnås ved at erstatte elasticitetskoefficienten i løsningen for det tilsvarende lineær-elastiske problem med den tilsvarende viskoelastiske operator defineret i Ligning 1.18. E-v-analogien er den forkortede betegnelse for denne analogi. Vi får herefter de viskoelastiske løsninger,

$$\epsilon_{\text{VISK}} = \int_0^t C(t-\theta) \frac{d(\epsilon_{\text{EL}})}{d\theta} d\theta \quad \text{eller} \quad \sigma_{\text{VISK}} = \int_0^t R(t-\theta) \frac{d(\sigma_{\text{EL}})}{d\theta} d\theta \quad \text{hvor}$$

$$C(t) = E * c(t) \quad \text{er den normerede krybningsfunktion} \quad (1.19)$$

$$R(t) = r(t) / E \quad \text{er den normerede relaxationfunktion}$$

Spænding og tøjning kan her opfattes i generaliseret betydning. Spændingen kan være kraften på en konstruktion, mens tøjningen er konstruktionens udbøjning.

#### Tilnærmet e-v-analogi

I nogle tilfælde vil tilstrækkeligt gode løsninger kunne opnås ved den i Ligning 1.20 forenklede udgave af analogien: I de tilsvarende elastiske løsninger erstattes den optrædende Young's modul

E med relaxationsfunktionen eller fleksibiliteten ( $1/E$ ) med krybningsfunktionen. Det skal understreges, at den således forenklede e-v-analogi er en tilnærmelse, der kun gælder, når  $r(t) \approx 1/c(t)$  og en af  $(\sigma, \varepsilon)$  stiger eller falder monotont.

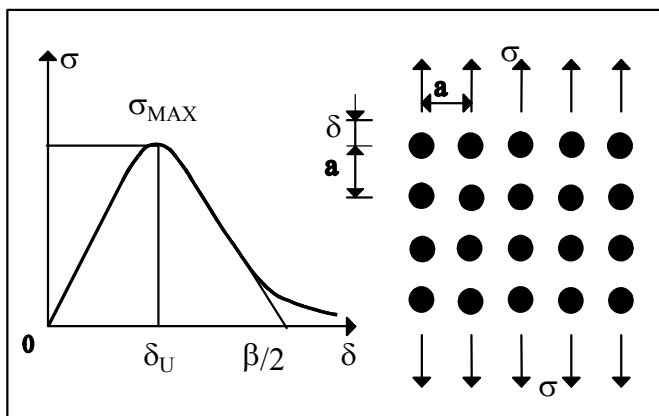
$$\varepsilon_{\text{VISK}} \approx C(t)\varepsilon_{\text{EL}} \quad ; \quad \sigma_{\text{VISK}} \approx R(t)\sigma_{\text{EL}} \quad \text{med} \quad C(t) = E * c(t) \quad \text{and} \quad R(t) = r(t)/E \quad (1.20)$$

## 2. STYRKE

Perfekte, homogene materialer, d.v.s. materialer, der er ensartet og fejlfrit opbyggede ned i den mindste mikrostrukturelle detalje, har meget store styrker. Disse såkaldte teoretiske styrker kan ofte beregnes ud fra kendskab til struktur og interatomare kræfter i materialet. Et simpelt eksempel på, hvordan den teoretiske styrke af krystallinske materialer kan forudsiges, vil blive givet i afsnit 2.1.

Vi gentager, at den teoretiske styrke kun kan opnås i meget perfekte (ideale) materialer, der er homogene helt ned fra det atomare niveau. Reproduktionen af egenskaber til mere realistiske materialer, som f.eks. træ, må bestemmes ad anden vej. Det vil sige, under anvendelse af kontinuum-fysiske metoder, der kan kvantificere den - ofte betydelige egenskabsmodifikation, der skyldes tilstedeværelse af medfødte defekter eller tilførte fejl som for eksempel knaster henholdsvis svindrevner i træ. Det vises i afsnit 2.2, hvordan relativt enkle energibetragtninger kan give værdifulde oplysninger om styrkereduktionen i revnede materialer. Knaster i træ kan analogiseres til revner med en længde ( $L$ ) lig knastens diameter.

I Afsnit 2.5 kommenteres nogle styrkebestemmende materialekonstanter og i Kapitel 3 relateres den udviklede teori til anvendelse på træ. Det vises blandt andet, hvordan styrke- og viskoelasticitetsteorien i fællesskab kan danne grundlag for bestemmelse af den hastighed, hvormed træ kan udtørres uden kvalitetsforringelse.



*Figur 2.1. Relation mellem spænding og deformation ved adskillelse af naboatomplaner i krystallinske materialer.*

### 2.1 Teoretisk Styrke

Figur 2.1 viser relationen mellem spænding og deformation af atomafstanden,  $a$ , i et perfekt krystallinsk materiale. Analytisk kan den viste sammenhæng gives følgende tilnærmede beskrivelse,

$$\sigma \approx \sigma_{\text{MAX}} \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\beta}\right) = \sigma_{\text{MAX}} \sin\left(\frac{2\pi a}{\beta} \varepsilon\right) \quad (2.1)$$

hvor tøjningen  $\varepsilon = \delta/a$  og  $\beta$  er en "bølgelængde", der bestemmes ved at udtrykke, at den energi, der medgår til at skabe to nye overflader ved brud er lig 2 gange overfladeenergien,  $\Omega$ , og lig arealet under arbejdslinien. Vi får

$$2\Omega = \int_0^{\beta/2} \sigma_{\text{MAX}} \sin\left(\frac{2\pi\delta}{\beta}\right) d\delta \Rightarrow \beta = \frac{2\pi\Omega}{\sigma_{\text{MAX}}} \quad (2.2)$$

Et udtryk for den maximale spænding, den teoretiske brudspænding, kan opstilles ved at udnytte, at arbejdsliniens begyndelsestangent definerer materialets elasticitetskoefficient,  $E$ , som udtrykt ved Ligning 2.3. Herefter medfører ligningerne 2.2 og 2.3, at materialets teoretiske styrke kan udtrykkes ved Ligning 2.4.

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}[\varepsilon = 0] = \sigma_{\text{MAX}} \frac{2\pi a}{\beta} \Rightarrow \sigma_{\text{MAX}} = \frac{E\beta}{2\pi a} \quad (2.3)$$

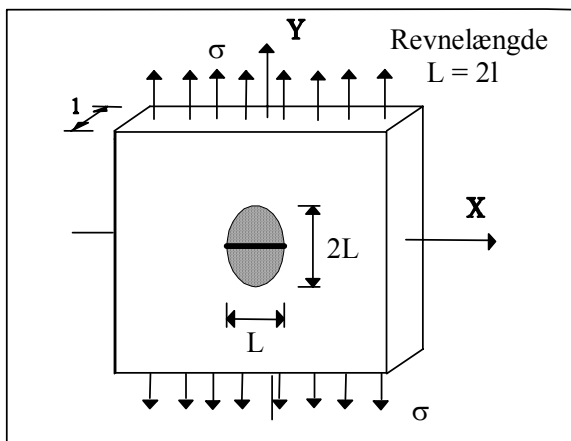
$$\sigma_{\text{MAX}} = \sqrt{\frac{E\Omega}{a}} \quad (2.4)$$

Størrelsesordenen af den teoretiske styrke,  $\sigma_{\text{MAX}}$ , og overfladeenergien,  $\Omega$ , kan udledes af ovenstående udtryk ved at nyttiggøre (andres teoretiske undersøgelser), at max spænding forekommer ved  $\delta = \delta_U \approx 0.25a$ . Det vil sige, at  $\beta \approx a$ . Vi får herefter

$$\sigma_{\text{MAX}} \approx \frac{E}{2\pi} \approx \frac{E}{10} ; \quad \Omega \approx \frac{Ea}{4\pi^2} \approx \frac{Ea}{50} \quad (2.5)$$

E/ $\sigma_{\text{MAX}}$	
Stål (pianotråd)	70
Jernwiskers	25
Kulfibre	100
Glasfibre	30
Mineraluld	100
Asbestfibre	70
Sisal	40
Bomuld	10
Polypropylenfibre	10
Silicafibre	4
NaCl-whiskers	40

**Tabel 2.1.** Eksempler på Young's modul i forhold til styrke



**Figur 2.2.** Tunnelrevne i midten af en uendelig stor skive, belastet i det fjerne med en jævnt fordelt spænding vinkelret på revneplanen (den plan, hvori revnen ligger)

Den teoretiske styrke som udtrykt ved Ligning 2.5 anvendes normalt som et første skøn af materialers (også ikke-krystallinske materialers) asymptotiske styrke, der kun kan opnås på meget tynde materialeenheder, fabrikerede og anvendte under ekstremt velkontrollerede forhold. I Tabel 2.1 er givet nogle eksempler på maksimale styrker, der i dag er opnået på "rene" materialer. Ofte er det således, at jo nærmere et materiales styrke kan drives til den teoretiske værdi, desto skørere er det. Det vil sige, at brud indtræder med aftagende, varslende plastiske deformationer. Der er dog undtagelser herfra, bl.a. en del plastmaterialer.

I reelle materialer (større enheder, grovere produktion, ikke så veldefinerede anvendelsesområder) bliver den styrken ofte reduceret med en faktor 5 - 100 i forhold til den teoretiske styrke. En forklaring herfor gives gennem brudmekanikken i det følgende afsnit.

## 2.2 Reel styrke - brudmekanik

Vi ønsker at bestemme styrken af et revnet materiale. Til dette formål betragter vi først den i Figur 2.2 beskrevne model af et perfekt elastisk materiale forsynet med en centralt placeret enkeltrevne. I afsnit 2.3 vises, hvordan styrkeløsningen til enkeltrevnesystemet lader sig generalisere til også at gælde multi-revnede materialer.

Energitætheden  $w$  (tøjningsenergi per volumenenhed) i materialemodellen i Figur 2.2 kan før revnen placeres udtrykkes som anført i følgende ligning.

$$w = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \quad \left( = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad \text{med Hooke's lov } \sigma = E\epsilon \right) \quad (2.6)$$

Ved skæring af en revne i skiven frigøres en tøjningsenergi, svarende til det areal revnen afskygger. Vi skønner gennem "strømlinie" betragtninger, at dette areal vil være ellipseformet som vist skraveret i Figur 2.2. Den frigjorte tøjningsenergi er arealet gange den lige angivne energitæthed

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \frac{\pi L^2}{2} \Rightarrow \Gamma = \frac{dW}{dL} = \frac{\pi L \sigma^2}{2E} = \pi l \frac{\sigma^2}{E} \quad (2.7)$$

hvor  $L = 2l$  er revnens totallængde. Det sidste led giver tillæg af frigjort tøjningsenergi,  $dW$ , ved en udvidelse,  $dL$ , af revnen - med andre ord, frigjort energi per fladeenhedsudvidelse af revnen (skiven har tykkelsen 1). Denne størrelse,  $\Gamma$ , kaldes tøjningsenergi-hastighed (eng. strain energy release rate).

Ligning 2.7 kan omskrives som vist i Ligning 2.8, der samtidigt definerer den alternative revneparameter  $K$  kaldet spændingsintensitetsfaktoren (eng. stress intensity factor). Spændingsintensitetsfaktoren kan vises at bestemme materialespændingen vinkelret på revneplanen ved  $\sigma_Y = \tilde{K}/(\pi r)$  gældende for meget små afstande  $r$  fra revnespiden.

$$K = \sqrt{E\Gamma} = \sigma \sqrt{\pi l} \quad (2.8)$$

### 2.2.1 Griffith-styrken (enkelt revne)

Brud indtræder (revnen bliver ustabil), når tøjningsenergi-hastigheden (under vores udvidelse af revnen) opnår en værdi, der lige netop svarer til 2 gange materialets overfladeenergi  $\Omega$ , svarende til en kritisk tøjningsenergi-hastighed på  $\Gamma_{CR} = 2\Omega$ . Denne energi er nemlig den der skal bruges til

at adskille to atomplaner, således at to nye overfladeenheder kan dannes, se afsnittet om teoretisk styrke. Med andre ord, brud indtræder når frigjort tøjningsenergi netop overskrider den energi, der skal bruges til dannelsen af de nye overflader. Dette brudkriterium og Ligning 2.8 giver nu den reelle brudstyrke  $\sigma_{CR}$  som følger

$$\sigma_{CR} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} \quad ; \quad (K_{CR} = \sqrt{E \Gamma_{CR}}) \quad (2.9)$$

hvor  $K_{CR}$  er den såkaldte kritiske spændingsintensitetsfaktor, der ligesom  $\Omega$  og  $\Gamma_{CR}$  er en materialekonsstant. Eksempler på kritiske spændingsintensitetsfaktorer er givet i Tabel 2.2.

$K_{CR}$ [kPa $\sqrt{m}$ ] for revneåbning	
Træ ( $\perp$ fibre)	350
Stål (alm. blødt)	100000
Stål (højværdigt)	200000
Granit	3000
Nylon	3000
Mørtel og beton	200
Is	150
Epoxy	400
Glas	800
Porcelæn	1100

**Tabel 2.2 .** *Eksempler på kritiske spændingsintensitetsfaktorer (størrelsesordner).*

Efter sin første "opfinder", Griffith 1920 (9), benævnes udtrykket i Ligning 2.9 ofte Griffith-relationen. Udtrykket forudsiger  $\sigma_{CR} \rightarrow \infty$  når  $l \rightarrow 0$ . Dette kan naturligvis ikke være korrekt. Den reelle styrke kan ikke overskride den teoretiske styrke,  $\sigma_{MAX}$ . Det kan imidlertid vises, at Ligning 2.9 er den korrekte grænseværdi for  $\sigma_{CR} \rightarrow 0$ , og at *udtrykket allerede for  $\sigma_{CR}/\sigma_{MAX} \approx 0.4-0.5$  er en meget fin tilnærmelse* til den såkaldte Dugdale-styrke, Dugdale 1960 (10), der bygger på en ret virkelighedstro modelopfattelse af revnede materialer. Dette forhold diskuteres nærmere i Afsnit 2.6.

Som før nævnt gælder de anførte Griffith-styrkeberegninger egentlig kun for perfekt lineært elastiske materialer. Det kan imidlertid vises, at styrkeformlerne kan anvendes med god tilnærmelse også for mange seje materialer (materialer med flydning). Her skal den kritiske energihastighed,  $\Gamma_{CR}$ , blot inkludere den plastiske energidissipation, der sker i revnespiden ved dannelsen af nye overflader. Samtidig skal  $\sigma_{MAX}$  opfattes som en flydespænding. Vi kan forestille os en effektiv kritisk energihastighed  $\Gamma_{CR,EFF} = 2\Omega + \sigma_{MAX}\delta_{CR}$ , hvor  $\delta_{CR}$  er materialets brudforlængelse i revnefronten.

### 2.2.2 Reel styrke versus teoretisk styrke

I forhold til den teoretiske styrke (Ligning 2.4) kan den reelle styrke (Ligning 2.9 med  $\Gamma_{CR} = 2\Omega$ ) skrives som anført i Ligning 2.10. Igen er  $a$  og  $L = 2l$  atomafstand henholdsvis total revnelængde.



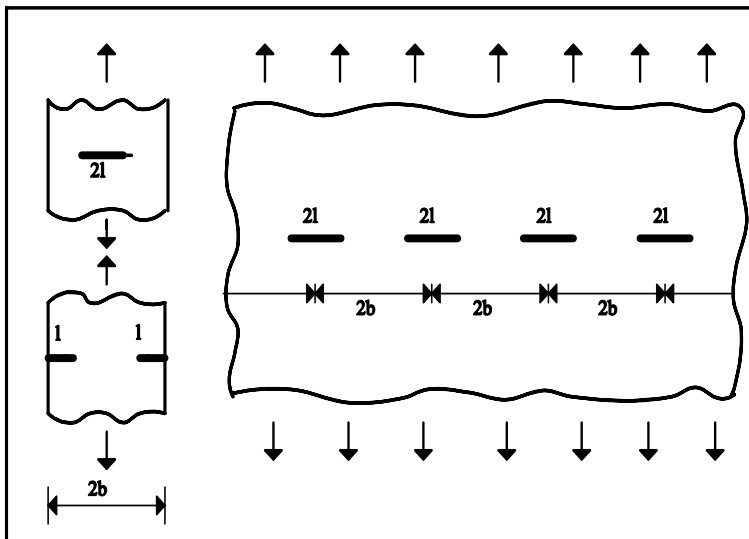
$$\frac{\sigma_{CR}}{\sigma_{MAX}} = \sqrt{\frac{2a}{\pi l}} \approx \sqrt{\frac{a}{L}} \quad (2.10)$$

**Eksempel:** Et materiale har en, for det nøgne øje, usynlig revne af længden  $2l = 5 \cdot 10^{-4}$  cm. Atomafstanden er  $a \approx 5 \cdot 10^{-8}$  cm. Hvad er styrken af det revnede materiale i forhold til den maksimalt opnåelige styrke. Ligning 2.10 giver svaret: Den reelle styrke er reduceret til en hundrededel af den teoretiske.

## 2.3 Multi- og kantrevner

Spændingsintensitetsfaktoren fra Ligning 2.8 for et enkeltrevnesystem under simpel belastning kan i mange tilfælde generaliseres til multirevnesystemer som vist i Ligning 2.11. Intensitetsfaktoren modificeres under anvendelse af en såkaldt interaktionsfaktor  $F$ , der tager hensyn til revners indbyrdes placering og afstand til materialekanter. Brud indtræder ved  $\sigma = \sigma_{CR}$ , når den modificerede intensitetsfaktor har opnået den kritiske værdi, der gælder for det betragtede materiale.

$$K = \sigma \sqrt{\pi l} * F \Rightarrow \sigma_{CR} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} * \frac{1}{F} \quad (2.11)$$



*Figur 2.4. Multirevne- og bæltedeller.*

For de simple revnesystemer vist i Figur 2.4 kan interaktionsfaktoren i Ligning 2.12 anvendes med god tilnærmelse. Den resulterende styrke er angivet i samme ligning. Det bemærkes specielt, at en kantrevne af længden  $l$  svækker en skive ligeså meget som en central revne af længden  $2l$ .

$$F \approx \left( 1 - \left( \frac{l}{b} \right)^2 \right)^{-1/2} \Rightarrow \sigma_{CR} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} \sqrt{1 - \left( \frac{l}{b} \right)^2} \quad (2.12)$$

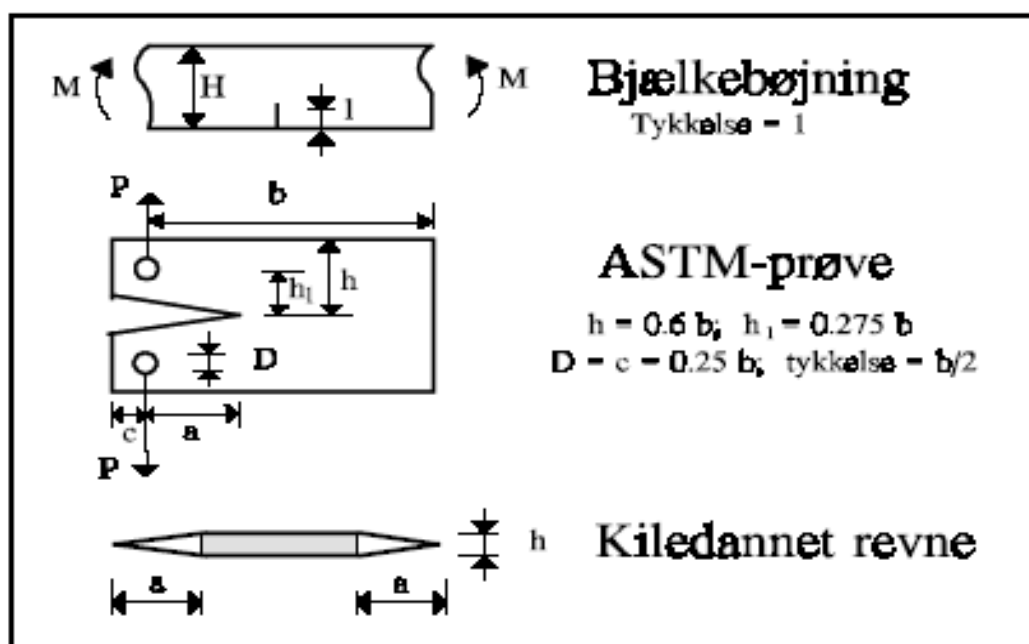
## 2.4 Andre revnesystemer

Der findes en mængde tabelværker (11,12,13,14), hvor spændingsintensitetsfaktoren er bestemt for andre og mere komplicerede revnekonfigurationer end de simple systemer, vi hidtil har betragtet. Ved styrkeberegning af komplicerede systemer er fremgangsmåden ganske som for de

simple systemer behandlet i Afsnit 2.3. Brud indtræder, når tøjningsenergi hastigheden, alternativt spændingsintensitetsfaktoren, opnår den kritiske værdi.

## 2.5 Bestemmelse af revneparametre

Styrkeparametre er en fællesbetegnelse for de to alternative parametre, den kritiske spændingsintensitetsfaktor,  $K_{CR}$ , og den kritiske tøjningsenergi hastighed,  $\Gamma_{CR}$ , der bestemmer et materiales revnefølsomhed. Styrkeparametrene er materialekonstanter på lige fod med for eksempel Young's modul  $E$ . De to parametre er relaterede gennem,  $K_{CR} = \sqrt{E\Gamma_{CR}}$ . Brud indtræder, når tilstanden, spændingsintensitet  $K$  (eller tøjningsenergi hastighed  $\Gamma$ ), når sin kritiske værdi gennem forøget belastning.



**Figur 2.5.** Nogle udvalgte revnekonfigurationer for hvilke spændingsintensitetsfaktorerne er givet i Ligningerne 2.13 - 2.15.

Grundlæggende kan  $K_{CR}$  bestemmes ved forsøg på emner (som i Figur 2.2) med kendt revnelængde. Den målte styrke og revnelængden samt Griffith's bæreevneformel bestemmer den søgte parameter. Alternativt kan bestemmelsen ske med ASTM's standardopstilling eller andre opstillinger som vist i Figur 2.5. Tilhørende hjælpeudtryk er vist i Ligninger 2.13 - 2.15.

$K_{CR}$  angives mest hensigtsmæssigt i dimensionen  $\text{kPa}\sqrt{\text{m}}$  eller  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Den alternative parameter,  $\Gamma_{CR}$ , angives normalt i  $\text{N/m} = \text{J/m}^2$  eller  $\text{kN/m} = \text{kJ/m}^2$ .

$$\begin{aligned}
 K &= 1.12\sigma\sqrt{\pi l} f(l/H) && \text{Bjælkebøjning} \\
 \sigma &= \frac{6M}{H^2} ; f(l/H) \approx \frac{1 - 0.1(l/H)^{1/5}}{[1 - (l/H)^2]^{3/2}} \\
 \Rightarrow M_{CR} &= \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} * \frac{H^2}{6.72 * f(l/H)}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$K = \frac{P}{b} \sqrt{a} f(a/b) \quad \text{ASTM -prøvning}$$

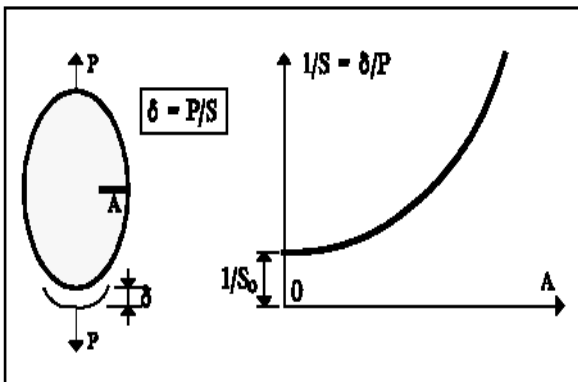
$$f(a/b) \approx 29.6 - 185.5 \frac{a}{b} + 655.7 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1017.0 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 638.9 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (2.14)$$

$$\Rightarrow P_{CR} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{a}} * \frac{b}{f(a/b)}$$

$$K = \frac{Eh}{\sqrt{2\pi a}} \quad \text{Kiledannet revne}$$

$$\Rightarrow h_{CR} = \frac{K_{CR}}{E} * \sqrt{2\pi a} \quad (2.15)$$

En anden mulighed for eksperimentel bestemmelse af tøjningsenergi hastighed og spændingsintensitetsfaktor for revnesystemer i almindelighed er skitseret i Figur 2.6. Med konstant kraft (P) og voksende revnelængde (svarende til det voksende revneareal A) måles stivheden (S) for den revnekonfiguration for hvilken K ønskes. Fleksibiliteten (1/S) differentieres med hensyn til A, hvorefter  $\Gamma$  og K kan bestemmes af Ligning 2.16. Stivheden af systemet uden revne er  $S_0$ .



**Figur 2.6.** Eksperimentel bestemmelse af spændingsintensitetsfaktorer.

Metoden, hvis teoretiske grundlag (den såkaldte Compliance Equilibrium Equation) er nærmere diskuteret i (12,13) for eksempel, er noget vanskelig at anvende i reelle (praktiske) eksperimenter, da den kræver ekstremt nøjagtige målinger. Den er til gengæld meget brugbar i computereksp eksperimenter.

$$\Gamma = \frac{P^2}{2} \frac{d(1/S)}{dA} \quad ; \quad K = P \sqrt{\frac{E}{2} \frac{d(1/S)}{dA}} \quad (2.16)$$

## 2.6 Troværdighed af Griffith-modellen

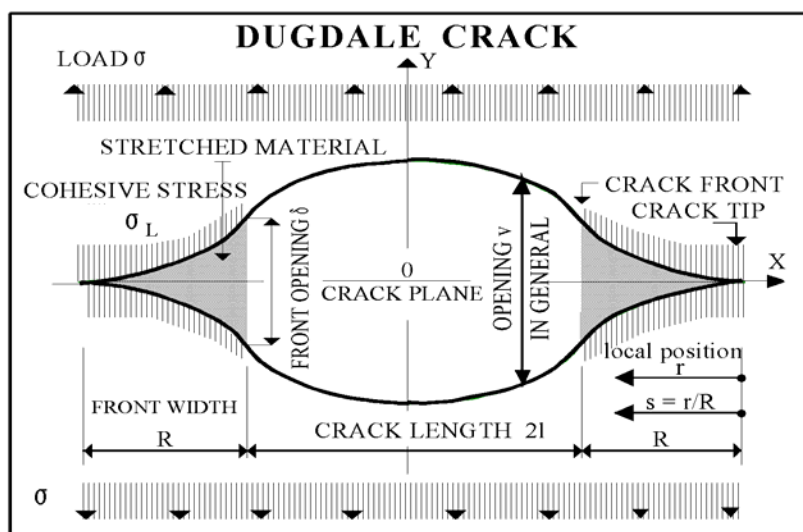
Dugdale's model, der er vist i Figur 2.7, forudsiger, at revnespidsspændingen er endelig og lig den teoretiske materialestyrke  $\sigma_{MAX}$ , når revnelængden går mod 0. En sammenligning mellem Griffith- og Dugdale-bæreevnen er foretaget i Ligning 2.17 og Figur 2.8, der er reproducerede fra (1,4). Bemærk at ordinaten i Figur 2.8 repræsenterer det såkaldte styrkeniveau  $FL = \sigma_{CR}/\sigma_{MAX}$ , der er et mål for materialekvalitet. Den indførte parameter d i Ligning 2.17 er den

såkaldte karakteristiske mikrostrukturelle dimension. I (4) er  $d$  skønnet lig den logaritmiske middelværdi af træfibers dimensioner:  $d \approx (3 \cdot 0.03)^{0.5} = 0.3 \text{ mm}$ .

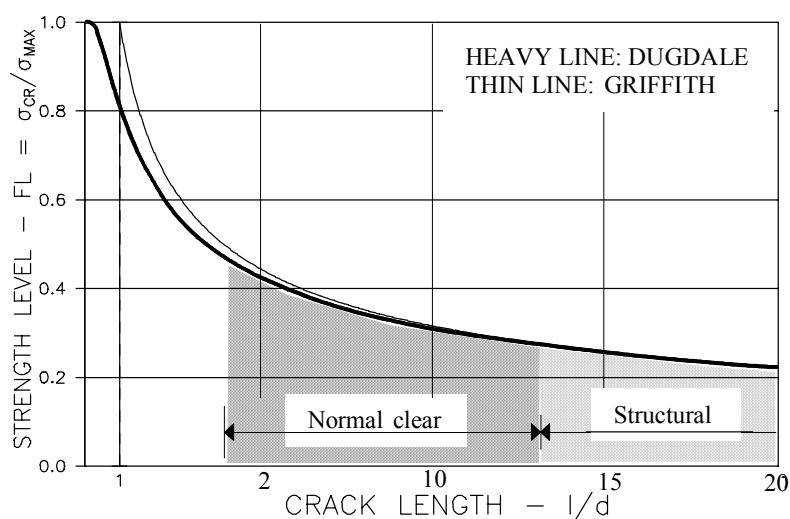
For en yderligere sammenligning af Griffith- og Dugdale-modellen er nogle vigtige karakteristika for den sidstnævnte model kvantificerede i Appendix A bagest i rapporten.

$$\text{Dugdale: } \sigma_{CR} \approx \sigma_{MAX} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{d}{l}\right)} \rightarrow \text{Griffith: } \sigma_{CR} = \sigma_{MAX} \sqrt{\frac{d}{l}} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} \text{ as } l \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

hvor den mikrostrukturelle dimension er  $d = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_{CR}}{\sigma_{MAX}} \right)^2$



**Figur 2.7.** Dugdale-revne belastet vinkelret på revne-plan. Den teoretiske materialestyrke er  $\sigma_L = \sigma_{MAX}$ .



**Figur 2.8.** Styrkeniveau (eller materialekvalitet)  $FL = \sigma_{CR} / \sigma_{MAX}$  som funktion af halv revnelængde  $l$  og karakteristisk dimension  $d$ . For træ er  $d \approx 0.3 \text{ mm}$ . Knastfrit træ og konstrukstræ ligger i de markerede områder.

### 3. TRÆ

Træ er et materiale, hvis rheologiske forhold med rimelig god tilnærmelse kan beskrives som et materiale med eksponential krybning, se (8) og afsnit 1.2.4.

$$c = c(t) = \frac{1}{E} \left( 1 + \left( \frac{t}{\tau} \right)^b \right) \quad \text{med } b \approx 1/4$$

$$r(t) \approx \frac{1}{c(t)} = \frac{E}{1 + (t/\tau)^b} \quad (b \leq 1/3)$$
(3.1)

hvor relaxationstiden  $\tau$  og dens afhængighed af orthotropi og ligevægtsfugt ( $u^1$ ) er angivet i nedenstående Ligning 3.2. En krybningsekspONENT på  $b \approx 0.25$  kan fastholdes under alle omstændigheder. Elasticitetsmodulen,  $E$ , er  $E_{\parallel} \approx 12000$  og  $E_{\perp} \approx 1000$  MPa (parallelt med, henholdsvis vinkelret på fibre). Under ikke-stabile klimaforhold bliver relaxationstiden formindsket. En faktor på 0.1 eller mindre er ikke ualmindeligt.

$$\tau = \tau_{15} * 10^{(15-u)/10} \quad (u < 30)$$

$$\tau_{15}(\text{døgn}) \approx \begin{cases} 10^4 & \text{træk, tryk, bøjning } \neq \text{ med fibre} \\ 30 & \text{forskydning } \neq \text{ med fibre} \\ 3 & \text{træk } \perp \text{ på fibre} \\ 10 & \text{lokalt i revnefronter} \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \\ \text{(krybning i revnefronter)} \end{matrix}$$
(3.2)

Som tidligere nævnt kryber en del viskoelastiske bygningsmaterialer, som for eksempel plast og en række keramiske materialer, på principielt samme måde som træ. Forskellene ligger i værdierne for  $b$  og  $\tau$ , der i de enkelte tilfælde må hentes eller deduceres fra speciallitteraturen. De teoretiske resultater, der præsenteres i dette afsnit er således ikke kun anvendelige på træ.

I de følgende afsnit gives en række eksempler, hvordan spændings-tøjnings-analyser af trækonstruktioner foregår ved hjælp af e-v-analogien beskrevet i Afsnit 1.3. I almindelighed kan krybningsekspONENTEN  $b \approx 0.25$  anvendes.

#### 3.1 Udtørring af træ

##### 3.1.1 Spændinger

Lad os som et eksempel på en viskoelastisk spændingsanalyse beregne den svindfremkaldte spænding i et stykke ligevægtsfugtigt træ, hvis længde fastholdes fra tiden,  $t = 0$ , hvorefter fugtindholdet i træet ændres homogent over tværsnittet.

Det svind, der fremkaldes i træet, såfremt det ikke er indspændt, er det såkaldte frie svind, der kan udtrykkes ved

$$\varepsilon_{SV,I} = s_I * [u(0) - u(t)] \quad ; \quad (I = T, R, L)$$
(3.3)

hvor fugtindholdet,  $u$ , som før nævnt, er vægt af indeholdt vand i forhold til tørvægten af det betragtede træemne. Fugtændringen,  $u(0) - u(t)$ , giver positivt svind ved udtørring. Indeks  $I$  på  $\varepsilon_{SV}$  og svindkoefficienten,  $s$ , angiver retning således at  $T$ ,  $R$ , og  $L$  refererer til træets tangentielle ( $T$ ),

<sup>1</sup> Fugtindholdet,  $u$ , i træ måles i kg/kg(tørvægt). I Ligning 3.2 indsættes  $u$  i %.

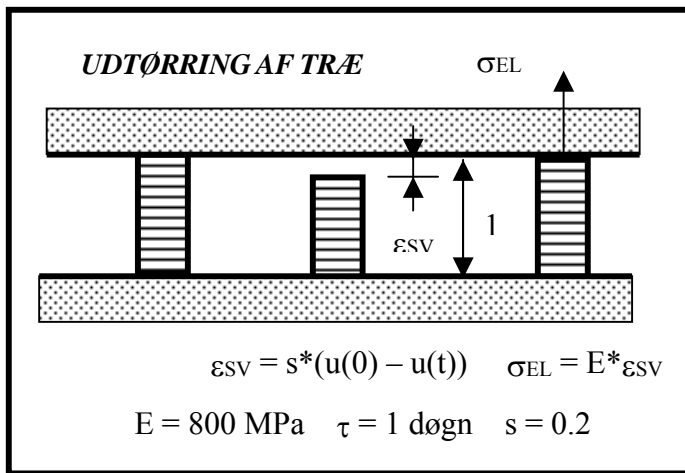
radiære (R) henholdsvis axiale retning (L). Disse symboler er almindeligt anvendte som retningsgivende i træteknologien; f.eks. betegner  $E_R$  træets elasticitetskoefficient i radiær retning o.s.v. Svindkoefficientens størrelsesorden er givet i Ligning 3.4.

$$s_T \approx 0.4, s_R \approx 0.2, s_L \approx 0.01 \quad (3.4)$$

Den elastiske spænding i vort eksempel kan beregnes som anført i Ligning 3.5 (se Figur 3.1). Den viskoelastiske spænding fås herefter ved hjælp af e-v-analogien (Ligning 1.19) som angivet i Ligning 3.6.

$$\sigma_{EL} = E * s * [u(0) - u(t)] \quad (3.5)$$

$$\sigma_{VISK} = E * s * \int_0^t R(t - \theta) \frac{d[u(0) - u(\theta)]}{d\theta} d\theta \quad (3.6)$$



**Figur 3.1.** Elastisk spænding i fastholdt bræt under udtørring. De angivne materialeparametre,  $s$ ,  $E$  og  $\tau$ , refererer til radiær retning. KrybningsekspONENTEN,  $b = 0.25$ . Viskoelastisk spænding er vist i Figurerne 3.2 og 3.3.

Vi forudsætter nu i eksemplet at udtørringen sker eksponentielt som angivet i Ligning 3.7, hvor "relaxationstiden" for udtørring  $\alpha$  kontrollerer udtørringshastigheden (mindre  $\alpha$ , hurtigere udtørring). Ligning 3.6 reduceres nu til løsningen i Ligning 3.8, hvor relaxationsfunktionen er introduceret fra Ligning 3.1.

$$u(0) - u(t) = \Delta u \left( 1 - \exp\left(-\frac{t}{\alpha}\right) \right) ; (\Delta u = u(0) - u(\infty)) \quad (3.7)$$

$$\sigma_{VISK} = \frac{Es\Delta u}{\alpha} \int_0^t \frac{\exp(-\theta/\alpha)}{1 + [(t - \theta)/\tau]^b} d\theta \quad (\text{nøjagtig løsning}) \quad (3.8)$$

En tilnærmet løsning på problemet kan fås ved at anvende den forenklede e-v-analogi i afsnit 1.3 på det elastiske spændingsudtryk i Ligning 3.5:  $E$  erstattes med  $r(t)$ , som igen introduceres fra Ligning 3.1. Resultatet er givet i Ligning 3.9.

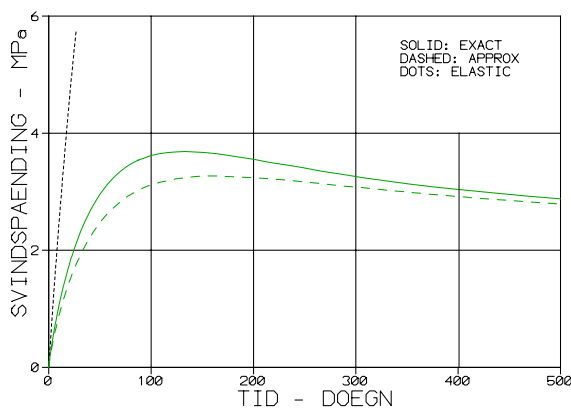
$$\sigma_{VISK} \approx Es\Delta u \frac{1 - \exp(-t/\alpha)}{1 + (t/\tau)^b} \quad (\text{tilnærmet løsning}) \quad (3.9)$$

Tilnærmelsen kan forventes at være nogenlunde god, idet dens forudsætning vedrørende monotont varierende spænding eller tøjning er overholdt ( $\epsilon \equiv 0$ ). Det bemærkes, at udtørrings-

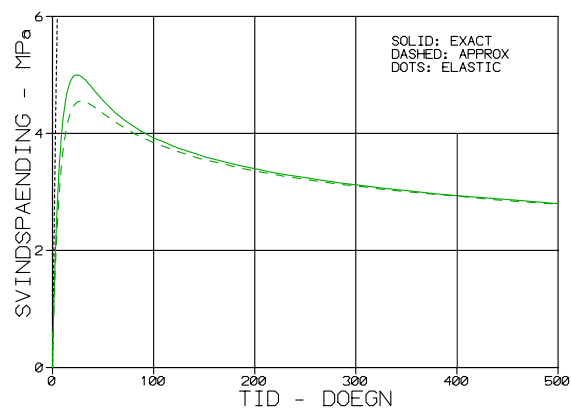
spændingen som udtrykt i både Ligning 3.8 og Ligning 3.9 kan forventes at forøges med aftagende  $\alpha$  (hurtigere udtørring).

**Taleksempel:** De ovenfor anførte resultater er behandlet numerisk for det i Figur 3.1 viste radiært indspændte bræt med udtørring fra  $u = 0.25$  til  $0.15$  med  $\alpha = 60$  døgn. De for beregningerne nødvendige parametre er angivet i figuren.

Resultaterne er vist i Figur 3.2 sammen med den elastiske løsning fra Ligning 3.5. Bemærk, at træets krybning i betydelig grad reducerer risikoen for skadelige udtørningsrevners opståen. Yderligere bemærkes, at svindspændingerne er stadigt aftagende fra  $t \approx 120$  dage. Til belysning af udtørningshastighedens betydning viser Figur 3.3 supplerende resultater fra en analyse med  $\alpha = 10$  døgn (hurtigere udtørring).



**Figur 3.2.** Svindspænding ved udtørring af fastholdt bræt.  $\alpha = 60$  døgn.



**Figur 3.3.** Svindspænding ved udtørring af fastholdt bræt.  $\alpha = 10$  døgn.

### 3.1.2 Styrkeforhold

Før udtørringen har vi konstateret enkelte revner af længden 3 mm ( $l = 1.5 \text{ mm} = 0.0015 \text{ m}$ ) i brættet. Med Ligning 2.9 og  $K_{CR} = 350 \text{ kPa}\sqrt{\text{m}}$  fra Tabel 2.2 bestemmes styrken til  $\approx 5000 \text{ kPa} = 5 \text{ MPa}$ , hvilket, jævnfør Figur 3.3, netop er tilstrækkeligt til at brættet kan tåle at blive udtørret med en hastighed svarende til  $\alpha = 10$  døgn. Træet kan altså overleve udtørningsprocessen med sin oprindelige struktur i behold - takket være krybning.

Ved en hurtigere udtørring vil revnen udvide sig, og i værste fald ødelægge træet. En mulighed for overlevelse kan dog findes i det forhold, at revnen, sammen med andre revner, udvider sig til en længde, der reducerer træets stivhed og dermed svindspændingerne til et holdbart niveau. Men overlevelsen sker da på bekostning af stivhed og styrke. Eksemplet belyser problematikken omkring udtørring af træ. Har vi tid (råd) til at udtørre langsomt kan vi få højværdigt træ. I modsat fald må vi affinde os med lavere kvaliteter.

## 3.2 Mekanisk levetid

En analyse af den mekaniske levetid for et viskoelastisk materiale kræver en kombination af rheologi og brudmekanik. Materialemodellen (Griffith eller Dugdale) har en begyndelsesrevnen,  $L = 2l_0$ , der er en medfødt typisk dominerende fejl i materialet. Levetiden er naturligt opdelt i to faser. Den første fase omhandler tiden  $t_s$  til begyndende revneudvidelse (materialet begynder at knage). Revnelængden i denne fase, og dermed styrken, er konstant mens revnefronten på grund

af krybning åbner sig mod en kritisk værdi. Den anden fase omhandler tiden fra  $t_S$  til  $t_{CAT}$ , hvor det endelige (katastrofale) brud indtræder. Revnen ekspanderer med fastholdt (kritisk) revnefront mod en kritisk længde, der netop nås til  $t = t_{CAT}$ .

Det vises i Afsnit 3.2.1 hvordan den første fase kan analyseres på simpel måde med Griffith-modellen og den tidligere omtalte simple e-v-analogi. Analysen i forbindelse med den anden fase nødvendiggør inddragelse af den før omtalte Dugdale-model med voksende revnelængde 2l. Beregningerne følger i princippet den samme vej som de simple, der medfører  $t_S$ . De er imidlertid meget omfattende, hvorfor de udelades i denne rapport. De færdige resultaterne præsenteres i Afsnit 3.2.2.

Til fastsættelsen af relaxationstiden  $\tau$  skal der knyttes følgende bemærkninger: Den relevante krybningsfunktion i levetidsberegninger er den, der gælder for den måde revnefrontens sider bevæger sig i forhold til hinanden. Da denne bevægelse i træ altid vil være en kombination af åbning og forskydning kan relaxationstidens størrelsesorden skønnes efter  $\tau_{15} \approx \sqrt{(\tau_{15\perp} * \tau_{15\parallel})} \approx 10$  døgn.

**Bemærkning:** Implicit er det i almindelighed i dette afsnit antaget, at belastninger er konstante (eller moderat varierende). Teoretisk er det uhyre vanskeligt at bestemme levetiden for vilkårligt varierende last. For harmoniske lastvariationer (og nogle jordskælvsvariationer) er der dog udviklet lovende resultater i (5,6,7). For de førstnævnte tilfælde er nogle løsninger præsenteret i Appendix B.

### 3.2.1 Simpel analyse - start på revneudbredelse ( $t_S$ )

Vi anvender den simple e-v-analogi som den er fremført i Afsnit 1.3. Det vil sige, opskriv først den elastiske løsning på det betragtede problem. Det vil her sige styrken som bestemt i Afsnit 2.2.1,

$$\sigma_{CR} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l}} = \sqrt{\frac{E \Gamma_{CR}}{\pi l}} \quad (3.10)$$

Erstat Young-modulen (E) i denne løsning med relaxationsfunktionen for træ ( $r(t)$ ). Herved fås

$$\sigma_{CR}(t) = \sqrt{\frac{r(t) \Gamma_{CR}}{\pi l}} = \sqrt{\frac{E}{1 + (t/\tau)^b} \frac{\Gamma_{CR}}{\pi l}} \quad (3.11)$$

der efter normering med hensyn til korttidsstyrken (Ligning 3.10) kan udtrykkes ved

$$\frac{\sigma_{CR}(t)}{\sigma_{CR}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (t/\tau)^b}} \quad (3.12)$$

Tiden i dette udtryk er tiden til begyndende revneudbredelse  $t_S$ , under den konstante belastning  $\sigma_{CR}(t_S)$ . Den søgte "levetid" til begyndende nedbrydning af træet er nu bestemt ved

$$\frac{t_S}{\tau} = \left( \frac{1}{SL^2} - 1 \right)^{1/b} \quad \text{hvor} \quad SL = \frac{\sigma_{CR}(t_S)}{\sigma_{CR}} \quad \text{er lastniveauet} \quad (3.13)$$



### 3.2.2 Nøjagtig analyse

Det antages at revnen i materialemodellen er den i Figur 2.7 viste Dugdale-revne, hvis karakteristika er beskrevet i Appendix A. Dugdale-modellen er valgt frem for Griffith-modellen fordi den, som antydnet i Afsnittene 2.2 og 2.6, har et større potentiale med hensyn til styrkebeskrivelse af materialer med små revner. Dette forhold er udnyttet i (4), hvortil der henvises med hensyn til generelle levetidsløsninger (også for andre viskoelastiske materialer). Nedenstående udtryk er den del af de generelle udtryk, der gælder for styrkeniveauer  $FL = \sigma_{CR}/\sigma_{MAX} < 40 - 50\%$ . At dette område er relevant for levetidsberegninger af trækonstruktioner er antydnet i Figur 2.8.

Uden udvikling gengives fra (1,4,5) følgende levetidsudtryk, der særskilt giver  $t_s$  og  $t_{CAT}-t_s$ . Som tidligere antydnet gælder de præsenterede udtryk ikke blot træ, men for alle materialer med eksponentialkrybning. I (2,3,4) er vist, hvordan udtrykkene kan generaliseres til materialer med vilkårlig krybning.

Nogle analyseresultater for konstant belastet træ er til sammenligning med eksperimentelle resultater vist i Figurernes 3.1 og 3.2. Eksperimenterne er rapporterede af Hoffmeyer (15), Krebs (16) og af Wood (17) - de såkaldte Madison-resultater.

#### Moderat varierende lastniveau

$$\frac{dSL}{dt} \geq -\frac{SL}{2\tau(1/(\kappa SL^2) - 1)^{1/b}} \quad \text{moderat varierende SL} \quad (3.14)$$

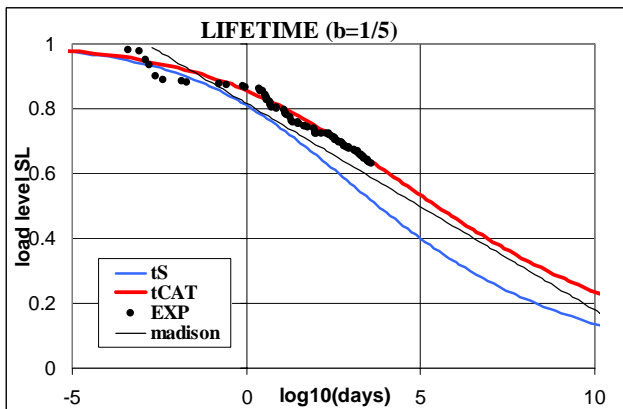
$$\int_0^{t_s} \left( 1 + \left( \frac{t_s - \theta}{\tau} \right)^b \right) \frac{dSL^2}{d\theta} d\theta = 1 \quad \Rightarrow t_s \quad (3.15)$$

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{(\pi FL)^2}{8q\tau} \frac{\kappa SL^2}{((1/(\kappa SL^2) - 1)^{1/b})} \quad \text{with } q = \left[ \frac{(1+b)(2+b)}{2} \right]^{1/b}$$

#### Konstant lastniveau (dead load)

$$\frac{t_s}{\tau} = \left( \frac{1}{SL^2} - 1 \right)^{1/b} ; \quad \frac{t_{CAT} - t_s}{\tau} = \frac{8q}{(\pi FL * SL)^2} H \left( \frac{1}{SL^2} - 1 \right) \quad (3.16)$$

hvor hjælpefunktionen H for lige brøker kan udtrykkes ved Ligning 3.17.



**Figur 3.1.** Dødlast levetid. Trækvalitet,  $FL = 0.2$ . Krybningseksponent,  $b = 0.2$ . Konstant fugtindhold  $u \approx 11\% \Rightarrow \tau_{II} = 25.1$  døgn ( $\tau_{I5} = 10$  døgn). Eksperimentelle værdier fra Hoffmeyer (15).

$$H(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{x^{1/b}}{1+x} dx \Rightarrow$$

$$H(\theta) = \theta - \log(\theta+1) \quad (\text{Maxwell}) \quad (b=1)$$

$$H(\theta) = \frac{2\theta^{3/2}}{3} - 2(\sqrt{\theta} - \arctan(\sqrt{\theta})) \quad (b=2/3)$$

$$H(\theta) = \frac{\theta^2}{2} - \theta + \log(\theta+1) \quad (b=1/2)$$

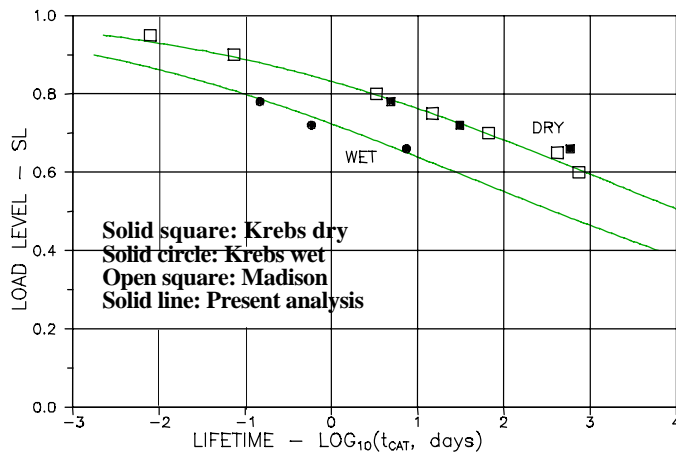
$$H(\theta) = \frac{2\theta^{5/2}}{5} - \frac{2\theta^{3/2}}{3} + 2(\sqrt{\theta} - \arctan(\sqrt{\theta})) \quad (b=2/5)$$

$$H(\theta) = \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2} + \theta - \log(\theta+1) \quad (b=1/3)$$

$$H(\theta) = \frac{2\theta^{7/2}}{7} - \frac{2\theta^{5/2}}{5} + \frac{2\theta^{3/2}}{3} - 2[\sqrt{\theta} - \arctan(\sqrt{\theta})] \quad (b=2/7)$$

$$H(\theta) = \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^2}{2} - \theta + \log(\theta+1) \quad (b=1/4)$$

$$H(\theta) = \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^4}{4} + \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^2}{2} + \theta - \log(\theta+1) \quad (b=1/5)$$
(3.17)

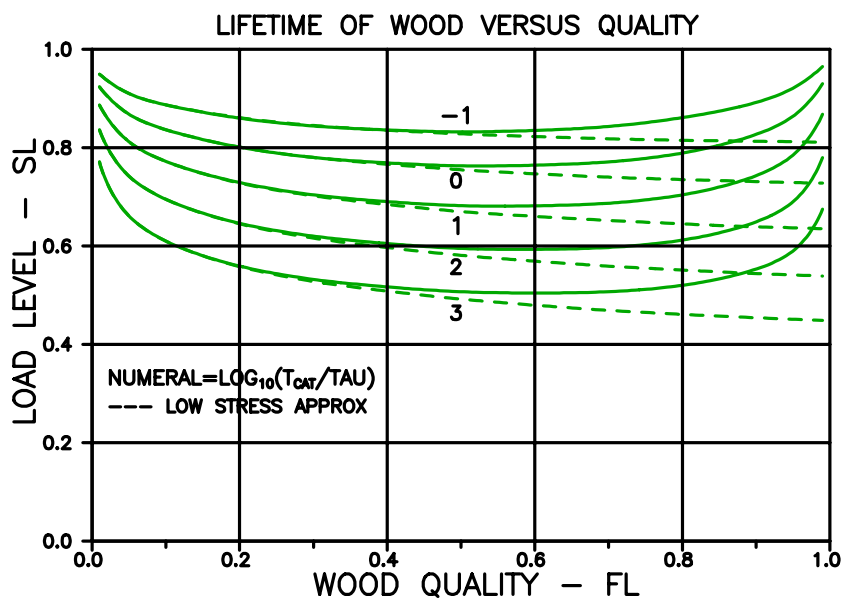


**Figur 3.2.** Knastfrit træ. Eksperimentelle levetidsdata fra Krebs (16): tør (12 %) og våd (> 30 %). Madison (17): tør (≈ 10 %). Teoretisk: (15 %, > 30 %), (FL,b) = (0.5,0.25), (τ<sub>TØR</sub>, τ<sub>VÅD</sub>) = (10,0.32) døgn.

### 3.3 Træs levetid versus trækvalitet

Som tidligere nævnt, forudsætter de præsenterede levetidsudtryk, at trækvaliteten er  $FL < 0.4 - 0.5$  (se Figur 2.8). Med dette analysegrundlag er levetidsresultaterne vist med stiplede linier i Figur 3.3. En mere generel analyse (1,4) med vilkårlige trækvaliteter giver levetider som de er vist med fulde linier i den samme figur. Det vil bemærkes, at forudsætningen  $FL < 0.4-0.5$  er særdeles relevant for normalt forekommende træ. Kun for ekstremt høje kvaliteter kan mere komplicerede analyser være på sin plads.

For normal design-praksis kan påregnes, at levetiden ved samme lastniveau afkortes med voksende trækvalitet. Tendensen er aftagende med stigende kvalitet, således at levetiden for højværdigt konstrukstræ og knastfrit træ i praksis kan regnes kvalitetsuafhængig.



*Figur 3.3. Træs levetid som funktion af lastniveau og træ-kvalitet.*

## APPENDIX A: Dugdale modellen

For en sammenligning mellem Griffith-modellen og Dugdale-modellen præsenteres nedenfor nogle nøgleresultater for den sidstnævnte model vist i Figur 2.7. Formlerne er et udsnit af en række udtryk præsenteret i (1,18).

### Frontbredde og frontåbning

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\sigma}{\sigma_L} \right)^2 ; \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\pi \sigma_L}{E} \left( \frac{\sigma}{\sigma_L} \right)^2 \quad (A1)$$

$$\frac{v}{\delta} \approx s^2 \quad (0 \leq s \leq 1 \text{ revneåbning i revnefront; } s \text{ er relativ afstand fra revnespids})$$

### Brudkriterium

$$\begin{array}{ll} \delta \Rightarrow \delta_{CR} & \text{Kritisk frontåbning} \Rightarrow \\ \Gamma = \delta \sigma_L \Rightarrow \Gamma_{CR} = \delta_{CR} \sigma_L & \text{Kritisk tøjningsenergi hastighed} \\ K = \sqrt{E\Gamma} \Rightarrow K_{CR} = \sqrt{E\Gamma_{CR}} & \text{Kritisk spændingsintensitetsfaktor} \end{array} \quad (A2)$$

### Referencestyrke

$$\frac{\delta_{CR}}{l_0} = \frac{\pi \sigma_L}{E} \left( \frac{\sigma_{CR}}{\sigma_L} \right)^2 \Rightarrow \sigma_{CR} = \sqrt{\frac{E\Gamma_{CR}}{\pi l_0}} = \frac{K_{CR}}{\sqrt{\pi l_0}} \quad (l_0 \text{ er } l \text{ til tid } t=0) \quad (A3)$$

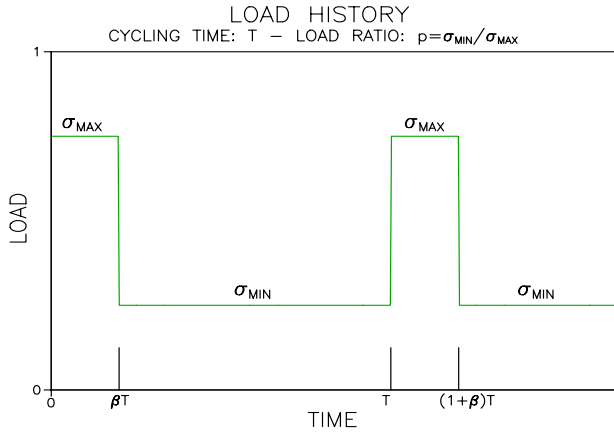
### Hjælpeudtryk

$$\frac{\delta}{\delta_{CR}} = \frac{l}{l_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_{CR}} \right)^2 = \kappa SL^2 ; \quad \frac{l_{CR}}{l_0} = \kappa_{CR} = \left( \frac{\sigma_{CR}}{\sigma} \right)^2 = \frac{1}{SL^2} \quad (\text{ved } \delta = \delta_{CR})$$

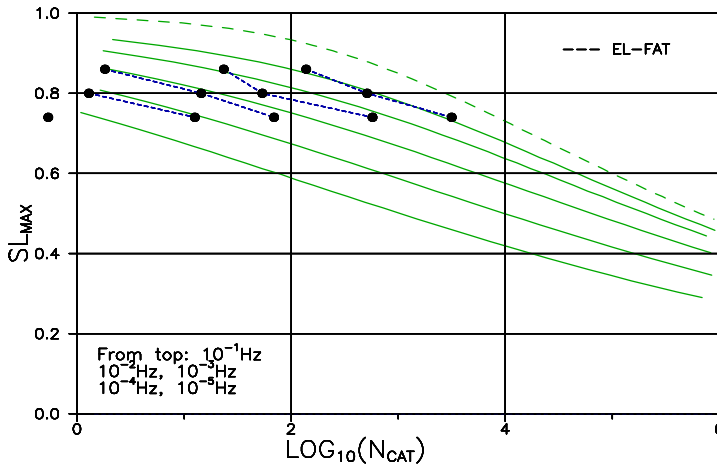
$$\kappa = \frac{1}{l_0} \text{ er Fejlbrøk} ; \quad SL = \frac{\sigma}{\sigma_{CR}} \text{ er Lastniveau} ; \quad FL = \frac{\sigma_{CR}}{\sigma_L} \text{ er Styrkeniveau} \quad (A4)$$

## APPENDIX B: Variabelt lastniveau

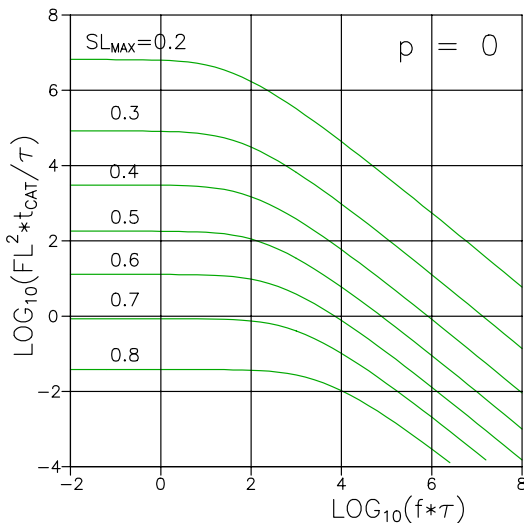
Vi betragter træ, harmonisk belastet som vist i Figur B1. Levetidsudtryk for træ belastet på denne måde er udviklede i (5). Generelt kan resultaterne kun bestemmes numerisk. Nogle dimensionsløse, grafiske løsninger er vist i Figurene B3 – B6 ( $FL = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ), som kan anvendes uafhængig af trækvalitet og relaksationstid. I Figur B2 er den udviklede analyse testet mod forsøgsresultater af Bach (19). Disse viser klart, at levetid for træ under svingende belastning, i modsætning til metaller, er afhængig af lastfrekvensen ( $f$ ).



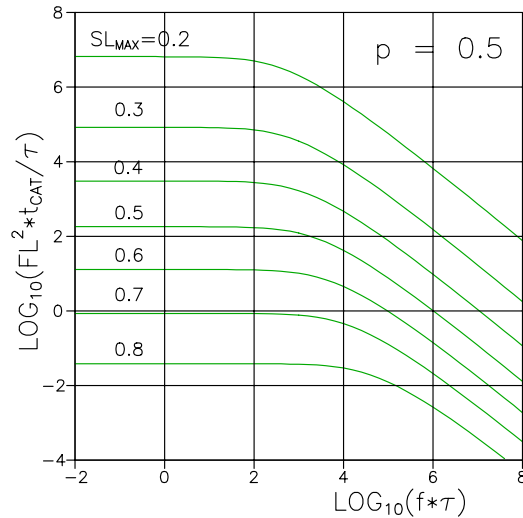
**Figure B1.** Basic load variation considered: Square wave loading with frequency  $f = 1/T$ .  $\sigma_{MIN} = p \cdot \sigma_{MAX}$ . In present analysis:  $\beta = 0.5$ .



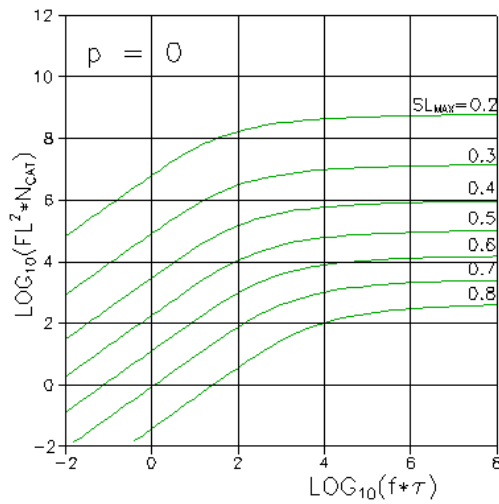
**Figure B2.** Fatigue of spruce compressed parallel to grain with  $(p, \beta) = (0, 0.5)$ . Elastic fatigue is predicted lifetime at very high frequency.  $(FL, b, \tau) = (0.4, 0.25, 1 \text{ day})$ . Eksperimentelle resultater (19).



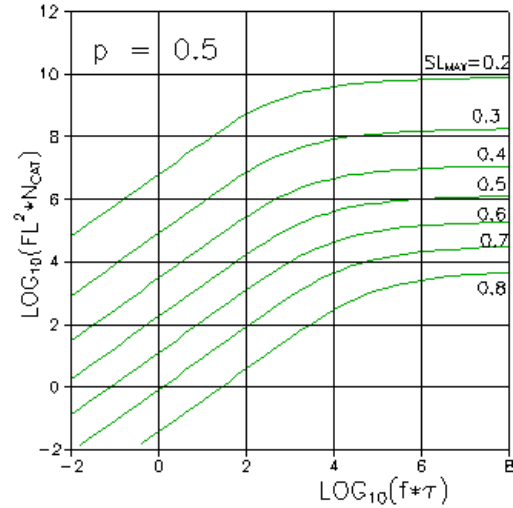
**Figure B3.** Normalized time to failure, accurate analysis.



**Figure B4.** Normalized time to failure, accurate analysis.



**Figure B5.** Number of load cycles to failure, accurate analysis.



**Figure B6.** Number of load cycles to failure, accurate analysis.

## Design diagrammer

Det kan observeres fra master-kurverne i Figurene B3-B6, at levetiden praktisk taget beskrives som elastisk fatigue for dimensionsløse lastfrekvenser  $f \cdot \tau > 10^5$  – og som dødlast levetid for frekvenser  $f \cdot \tau < 10$ . Både krybnings- og fatiguemekanismer er aktive i transitionsområdet  $10 < f \cdot \tau < 10^5$ . Nemme, sikre estimater for lastbrøker,  $p < 0.5$  kan bestemmes som vist i Ligning B2 (for højere lastbrøker skal transitionsintervallet forskydes til højre). Eksempler på design diagrammer er vist i Figurene B7 og B8.

De indførte symboler, C og M har betydningen forklaret i symbollisten præsenteret i Kapitel 4 bagest i notatet.

Elastic fatigue :

$$N_{CAT} = \frac{1}{G SL_{MAX}^2} \left[ \frac{1 - SL_{MAX}^{M-2}}{(M-2) SL_{MAX}^{M-2}} - \frac{1 - SL_{MAX}^{M-4}}{(M-4) SL_{MAX}^{M-4}} \right] \quad \text{with } G = \frac{C FL^2}{13} \left[ \frac{1-p^2}{2} \right]^M \quad (B1)$$

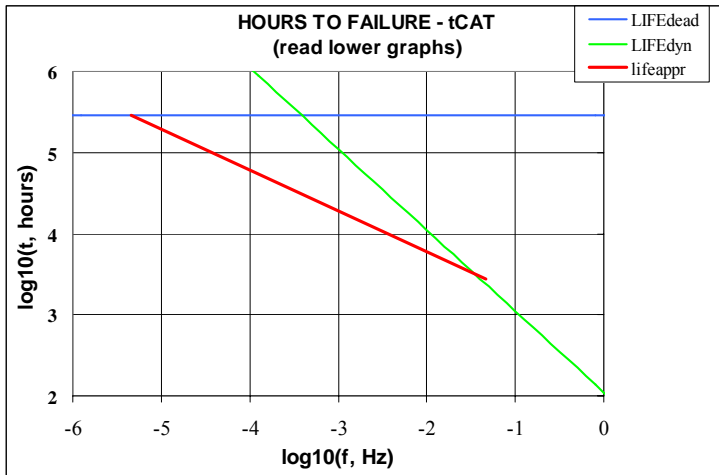
$$t_{CAT} = N_{CAT} * T = N_{CAT} / f$$

Lifetime analysis for  $p < 0.5$ :

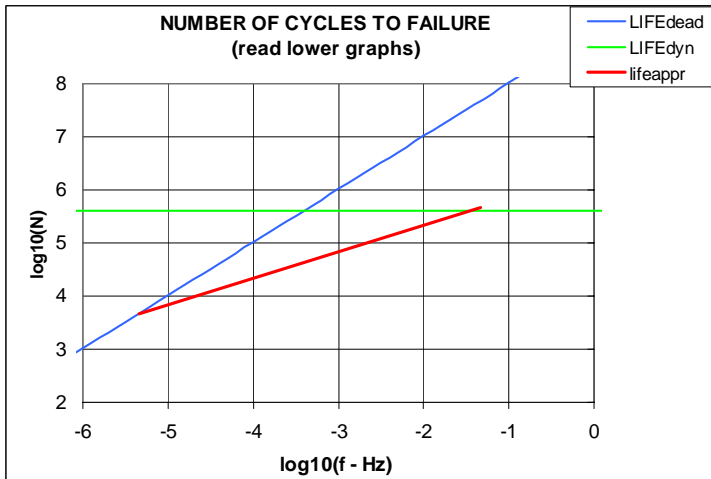
dead load (Eq. 3.16) when  $f \tau < 10$

elastic fatigue (Eq. B1) when  $f \tau > 10^5$  (B2)

straigh line log- log interpolation when  $10 < f \tau < 10^5$



**Figure B7.** Time to failure of wood subjected to variable load according to Figure 3  $SL_{max} = 0.6$ ,  $p = 0$ ,  $FL = 0.2$ , and  $b = 0.2$ . Constant moisture content,  $u \approx 11\% \Rightarrow \tau_{11} = 25.1$  days ( $\tau_{15} = 10$  days), Fatigue parameters  $(M, C) = (9, 3)$ .



**Figure B8.** Number of load cycles to failure of wood subjected to variable load according to Figure 3.  $SL_{max} = 0.6$ ,  $p = 0$ ,  $FL = 0.2$ , and  $b = 0.2$ . Constant moisture content,  $u \approx 11\% \Rightarrow \tau_{11} = 25.1$  days ( $\tau_{15} = 10$  days), Fatigue parameters  $(M, C) = (9, 3)$ .

## 4. Symbolliste

De oftest anvendte symboler i artiklen er listet nedenfor. Listen inkluderer ikke lokale symboler, der kun anvendes i mellemresultater. Den udprægede brug af dimensionsløse størrelser skal noteres. For eksempel, lastniveau, styrkeniveau, og fejlbrøk.

Bemærk den lidt uheldige blanding af symboler for teoretisk styrke ( $\sigma_1$  og  $\sigma_{MAX}$ ). Af tekstsammenhængen vil dette imidlertid ikke føre til misforståelser.

### Load and strength

Load in general	$\sigma$
Strength (reference)	$\sigma_{CR}$
Theoretical strength	$\sigma_1$ ( $\sigma_{MAX}$ )
Strength level	$FL = \sigma_{CR}/\sigma_{MAX}$
Load level	$SL = \sigma/\sigma_{CR}$

### Variable load

Minimum load	$\sigma_{MIN}$
Minimum load level	$SL_{MIN} = \sigma_{MIN}/\sigma_{CR}$
Maximum load	$\sigma_{MAX}$
Maximum load level	$SL_{MAX} = \sigma_{MAX}/\sigma_{CR}$
Fractional time under max load	$\beta$
Load ratio	$p = \sigma_{MIN}/\sigma_{MAX} = SL_{MIN}/SL_{MAX}$

### Damage

Crack length	$l$
Initial crack length (reference)	$l_0$
Damage ratio (or just damage)	$\kappa = l/l_0$

### Fatigue parameters

Damage rate constant	$C \approx 3$
Damage rate power	$M \approx 9$

### Time and creep

Time in general	$t$
Creep function in load direction	$c(t) = (1 + (t/\tau)^b)/E$
Flexibility	$1/E = c(0)$
Normalized creep function	$C = 1 + (t/\tau)^b$
Relaxation time (or doubling time)	$\tau$
Creep power	$b$
Time shift parameter	$q = (0.5(1 + b)(2 + b))^{1/b}$

### Lifetime and load cycles

Cycling time	$T$
Frequency	$f = 1/T$
Lifetime	$t_{CAT}$
Number of load cycles to failure	$N_{CAT} = t_{CAT}/T = f \cdot t_{CAT}$

### Moisture

Moisture content	$u$ (kg/kg(dry))
------------------	------------------



## 5. Litteratur

1. Nielsen, L. Fuglsang: "The theory of wood as a damaged viscoelastic material", i Borg Madsen: "Structural behavior of timber", Timber Engineering Ltd., Vancouver, B.C., Canada, 1992.
2. *Idem*: "Crack Propagation in Linear-Viscoelastic Materials", Byggningsstatistiske Meddelelser, 49(1978), 1, (in danish, english summary).
3. *Idem*: "A Lifetime Analysis of Cracked Linear Viscoelastic Materials - with Special Reference to Wood", IUFRO-Engineering Group Conference 1982, Borås, Sweden. Proc. Chalmers Univ. of Technology, Dept. Civil Eng., Gothenburg, pp. 151 – 178, 1982.
4. *Idem*: "Lifetime, Residual Strength, and Quality of Wood - and other viscoelastic materials". Holz als Roh- u. Werkstoff, 49(1991), 451-455.
5. *Idem*: "Lifetime and residual strength of wood subjected to static and variable load, Part I: Introduction and analysis", Holz als Roh- und Werkstoff, 58(2000), 81-90. "Lifetime and residual strength of wood subjected to static and variable load, Part II: Applications and design", Holz als Roh- und Werkstoff, 58(2000), 141-152.
6. *Idem*: 'Models for damage accumulation in wood', 3rd World Conference on Structural Control, held in Como, Italy 7-12 April 2002. Proceedings (Fabio Casciati, editor), Dept. Struct. Mech., University of Pavia, 2002.
7. *Idem*: 'On the influence of crack closure on strength estimates of wood', Holz als Roh- und Werkstoff, 62(2004).
8. *Idem*: "Power Law Creep as Related to Relaxation, Elasticity, Damping, Rheological Spectra and Creep Recovery - With Special Reference to Wood", Conference of Int. Union of Forestry Research Organizations (IUFRO), Xalapa, Mexico, December 1984. Proc., Build. Mat. Lab., Techn. Univ. Denmark 1985, 181 - 204.
9. Griffith, A.A., 'The phenomenon of rupture and flow in solids'. Trans. Royal Soc. of London, 221(1920), 163.
10. Dugdale, D.S., 'Yielding of steel sheets containing slits'. J. Mech. and Phys. of Solids, 8(1960), 100 - 104.
11. Murakami, Y. (ed): "Stress intensity factors handbook", Vols. I and II, Pergamon Press, New York, 1987.
12. Paris, P.C. and Sih, G.C.: "Stress analysis of cracks"; in Fracture Toughness Testing and Its Application. American Society for Testing of Materials, Baltimore, MD, 1965.
13. Tada, H., Paris, P.C., and Irwin, G.R.: "The Stress Analysis of Cracks Handbook", Del Research Corp., Hellertown, PA, 1973.
14. Nielsen, L. Fuglsang: "Materiale mekanik II" (Material Mechanics II), Building Materials Laboratory, Tech. Univ. Denmark, tech. rep. 189(1988), 175 pp.
15. Hoffmeyer, Preben: "Failure of wood as influenced by moisture and duration of load", Ph.D. thesis, State University of New York, College of Environmental Science and Forestry, Syracuse, New York, January 1990.
16. Krebs, H.J.: "The influence of moisture content on the long-term mechanical properties of wood" (in danish). Thesis, Build. Mat. Lab., Tech. Univ. Denmark, 1984.
17. Wood, L.W.: "Relation of strength of wood to duration of stress". U.S. Forest Products Laboratory, Madison, Wisc., USA, Report No. R-1916(1951).
18. Nielsen, L. Fuglsang: "Modified Dugdale cracks and fictitious cracks - subjected to sub-critical loading", Byggningsstatistiske Meddelelser, 70(1999), 85-106.

19. Bach, L.: "Frequency-dependent fracture under pulsating loading". Build. Mat. Lab., Tech. Univ. Denmark, Tech. report 68, 1979, (presented at Forest Prod. Res. Society Annual Meeting 1975, Portland, Oregon, USA).